

3 p. 21 Critères de divisibilité

Parmi les nombres 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indique ceux qui sont divisibles :

- a. par 2 : 12 ; 30 ; 246 ; 4 238.
- b. par 3 : 12 ; 30 ; 27 ; 246.
- c. par 5 : 30 ; 325.
- d. par 9 : 27.

18 À la bibliothèque

Dans une bibliothèque, il y a 360 livres qu'il faut ranger sur des étagères contenant 22 livres chacune. Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?

$$360 = 22 \times 16 + 8.$$

Il faut donc 17 étagères pour ranger tous ces livres (16 étagères pleines et une dix-septième sur laquelle 8 livres seront rangés).

19 Le tour du monde

Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours.

- a. Combien cela représente-t-il de semaines ?

$$80 = 7 \times 11 + 3.$$

Cela représente 11 semaines environ.

80 jours représentent 11 semaines et 3 jours.

- b. S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

11 semaines après un jeudi, on est toujours un jeudi. 3 jours après, on sera un dimanche..

20 Dans une partie de cartes, 180 jetons noirs et 120 jetons blancs doivent être tous répartis entre les joueurs. Tous les joueurs doivent avoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.

- a. Peut-il y avoir vingt joueurs ? Neuf joueurs ?

$$180 = 20 \times 9 \text{ et } 120 = 20 \times 6.$$

20 divise 180 et 120, il peut donc y avoir 20 joueurs.

$$120 = 9 \times 13 + 3.$$

Il ne peut pas y avoir 9 joueurs car 120 n'est pas divisible par 9 (il resterait 3 jetons qu'on ne pourrait pas répartir équitablement).

- b. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donne toutes les possibilités.

On cherche donc tous les diviseurs communs à 180 et 120. Il peut donc y avoir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ou 60 joueurs.

21 Chez le fleuriste

Un fleuriste dispose de 30 marguerites et de 24 tulipes. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de fleurs de chaque sorte en utilisant toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut réaliser.

- a. Explique pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 30 et 24. Lequel de ces diviseurs communs choisir ? Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ?

Le fleuriste veut utiliser toutes ses fleurs, il ne doit pas en rester, le nombre de bouquets doit donc être un diviseur de 30 et de 24.

On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut réaliser, on doit donc choisir le plus grand diviseur commun de 30 et 24, c'est à dire le PGCD de 30 et 24.

Les diviseurs commun de 30 et 24 sont : 1 ; 2 ; 3 et 6.

Il peut alors réaliser 6 bouquets au maximum.

- b. Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

$$30 \div 6 = 5 \text{ et } 24 \div 6 = 4.$$

Chaque bouquet sera composé de 5 marguerites et 4 tulipes.

22 |

23 |

24 |

25 |

26 |

27 Tournage

Lors du tournage d'un film, le réalisateur dispose de 651 figurants habillés en noir et de 465 figurants habillés en rouge. Il doit former des équipes constituées de figurants vêtus de rouge et de figurants vêtus de noir de la manière suivante : dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en rouge ; dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en noir ; le nombre d'équipes doit être maximal.

Quelle sera la composition d'une équipe ?

On calcule le PGCD de 651 et 465 par l'algorithme d'Euclide.

$$651 = 465 \times 1 + 186$$

$$465 = 186 \times 2 + 93$$

$$186 = 93 \times 2$$

Ainsi $\text{PGCD}(651 ; 465) = 93$.

Le réalisateur pourra former 93 équipes avec (651 $\div$ 93) 7 figurants habillés en noir et 5 figurants habillés en rouge dans chaque équipe.

28 Exposition

Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres (photos de paysage et portraits) sur des panneaux. Tous les panneaux doivent contenir le même nombre de photos de paysage et le même nombre de portraits. Il doit exposer 224 photos de paysage et 288 portraits.

- a. Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes ses photos ? Justifie.

On cherche un nombre qui divise 224 et 288 qui soit le plus grand possible, on cherche donc le PGCD de 224 et 288 que l'on va déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Par la méthode des divisions, $\text{PGCD}(224 ; 288) = 32$.

Le photographe peut donc réaliser au maximum 32 panneaux.

- b. Combien mettra-t-il alors de photos de paysage et de portraits sur chaque panneau ?

$$224 \div 32 = 7$$

$$288 \div 32 = 9 \quad \text{Sur chaque panneaux,}$$

il mettra 7 photos de paysage et 9 portraits

29

30

31 Carrelage

Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur se trouvant au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.

Détermine la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau de faïence sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Les carreaux sont des carrés, il faut donc que le côté de ces carrés divise 210 et 135 et soit le plus grand. On va alors calculer le PGCD de 210 et 135.

Soit $M = \text{PGCD}(210 ; 135)$.

$$210 = 135 \times 1 + 75$$

$$135 = 75 \times 1 + 60$$

$$75 = 60 \times 1 + 15$$

$$60 = 15 \times 4$$

Ainsi $\text{PGCD}(210 ; 135) = 15$

Les carreaux doivent donc avoir un côté de 15 cm.

Dans la hauteur on pourra donc mettre $(210 \div 15)$ 14 carreaux et dans la largeur $(135 \div 15)$ 9 carreaux. Soit au total (14×9) 126 carreaux.

32 Définition

a. Liste les diviseurs communs à 42 et 65.

Diviseurs de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42.

Diviseurs de 65 : 1 ; 5 ; 13 ; 65.

Le diviseur commun à 42 et 65 est 1.

b. Dédus-en que 42 et 65 sont premiers entre eux.

1 est l'unique diviseur commun à 42 et 65, ils sont donc premiers entre eux.

33

34 Dans chaque cas, sans calculer le PGCD, indique pourquoi les deux entiers donnés ne sont pas premiers entre eux.

a. 98 et 114 b. 125 et 75 c. 27 et 63

a. 98 et 114 sont pairs, ils ont donc 2 comme diviseur commun.

b. 125 et 75 terminent par 5, ils ont donc 5 comme diviseur commun.

c. 27 et 63 ont 9 comme diviseur commun ($2 + 7 = 9$ et $6 + 3 = 9$).

35

36 Listes

a. Écris la liste des nombres entiers naturels inférieurs à 24 qui sont premiers avec 24.

24 est divisible par 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24.

On cherche donc des nombres strictement compris entre 1 et 24 et qui ne soient pas divisible par ces nombres.

On a donc : 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 et 23

b. Écris la liste des nombres entiers naturels inférieurs à 31 qui sont premiers avec 31.

31 n'est divisible que par 1 et par lui-même donc tous les entiers naturels inférieurs à 31 sont premiers avec 31.

37 Pairs, impairs

a. Peux-tu trouver deux nombres entiers pairs premiers entre eux ? Justifie.

Les nombres pairs sont divisibles par 2, ils ont donc un diviseur commun supérieur à 1, ils ne peuvent donc pas être premiers entre eux.

b. Peux-tu trouver deux nombres entiers impairs premiers entre eux ? Justifie.

Oui, par exemple 3 et 5, 7 et 9...

c. Peux-tu trouver un nombre entier pair et un nombre entier impair qui ne sont pas premiers entre eux ? Justifie.

Un nombre pair et un nombre impair peuvent avoir un diviseur commun supérieur à 1 et ne sont donc pas forcément premiers entre eux.

Par exemple 9 et 24 sont divisibles par 3 et ne sont donc pas premiers entre eux.

38

39

40

41

42

a. Pour chaque nombre : 1 035 ; 774 ; 322, indiquer s'il est divisible par 2, par 5, par 9.

1 035 se termine par un 5 et la somme de ses chiffres est $1 + 0 + 3 + 5 = 9$, il est donc divisible par 5 et 9 mais par par 2.

774 se termine par 4 qui est pair et la somme de ses chiffres est $7 + 7 + 4 = 18$ (9×2) donc 774 est divisible par 2 et par 9 mais pas par 5.

322 se termine par 2 et la somme de ses chiffres est $3 + 2 + 2 = 7$ (qui n'est pas divisible par 9) donc 322 est divisible par 2 mais pas par 5 et 9.

b. Les fractions $\frac{774}{1\,035}$ et $\frac{322}{774}$ sont-elles irréductibles.

774 et 1 035 sont divisibles par 9, on peut donc simplifier $\frac{774}{1\,035}$ par 9.

322 et 774 sont divisibles par 2, on peut donc simplifier $\frac{322}{774}$ par 2.

Les fractions ne sont donc pas irréductibles.

c. Calculer le PGCD de 322 et 1 035. La fraction $\frac{322}{1\,035}$ est-elle irréductible ?

On calcule le PGCD de 322 et 1 035 par l'algorithme d'Euclide.

$$1\,035 = 322 \times 3 + 69$$

$$322 = 69 \times 4 + 46$$

$$69 = 46 \times 1 + 23$$

$$46 = 23 \times 2 \quad \text{Ainsi } \text{PGCD}(322 ; 1\,035) = 23.$$

23 est un diviseur de 322 et de 1 035, on peut donc simplifier la fraction par 23.